



TITLE:

# 平行な平面場を持つリーマン多様体のベッチ数について(部分多様体論とその周辺)

AUTHOR(S):

大町, 英理子

---

CITATION:

大町, 英理子. 平行な平面場を持つリーマン多様体のベッチ数について (部分多様体論とその周辺). 数理解析研究所講究録 1995, 907: 123-130

ISSUE DATE:

1995-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/59471>

RIGHT:

# 平行な平面場を持つリーマン多様体のベッチ数について

大町英理子 (Eriko Omachi)

**§ 1. 序.**  $M^n$  を向き付け可能な連結コンパクト  $n$  次元 Riemann 多様体とし, Riemann 計量を  $g = (g_{ji})$  で表す. また  $M^n$  の  $p$  次 Betti 数を  $b_p$  で表す.  $M^n$  が 1 個または 2 個の平行ベクトル場を持つとき, その Betti 数に関して L. Karp や A. Lichnerowicz 等が研究しているが ([1][2]), より一般に,  $M^n$  が  $r$  個の平行ベクトル場を持つ場合, Betti 数に関して次の不等式が知られている ([3]):

**定理 (Ogawa - Tachibana)**  $M^n$  が  $r$  ( $1 \leq r \leq n$ ) 個の平行ベクトル場を持つとき, 不等式

$$\sum_{i=0}^p (-1)^i \binom{s+r-1}{i} b_{p-i} \geq 0, \quad (1 \leq s \leq r, 1 \leq p \leq n)$$

が成り立つ.

ここでは,  $M^n$  が向き付け可能な平行 2 次元 distribution を持つ場合に, Betti 数に関してどのような不等式が成り立つかを調べる. 扱う関数やテンソルはすべて  $C^\infty$  とする.

$H_p$  を  $M^n$  上の調和  $p$ -形式全体のなすベクトル空間とすれば,  $\dim H_p = b_p$  である. 便宜上,  $p > n$  または  $p < 0$  の時には  $H_p = \{0\}$  とし, その上では各作用素は自明に作用するものとする.

ベクトル場  $u^j (\partial / \partial x^j)$  は 1-形式  $u_i dx^i$  ( $u_i = g_{ij} u^j$ ) と必要に応じて同一視し, ともに  $u$  で表す.  $u$  による外積および内積作用素を  $e(u)$ ,  $i(u)$  で表す. すなわち,  $p$ -形式  $w$  に対しては,  $X_1, \dots, X_{p-1}$  を接ベクトルとするとき

$$e(u)w = u \wedge w$$

$$(i(u)w)(X_1, \dots, X_{p-1}) = W(u, X_1, \dots, X_{p-1})$$

であり,

$$e(u)^2 = i(u)^2 = 0$$

をみたす. また, 単位ベクトル  $u$  に対しては

$$i(u)e(u) + e(u)i(u) = I$$

が成り立つ. ここに  $I$  は恒等作用素である. 上の定理はこれらの性質を使って証明される.

**§ 2. 平行な平面場に関連する作用素.** 以下,  $M^n$  は向き付け可能な平行 2 次元 distribution  $D$  を持つと仮定する.  $D$  の正規直交基底  $u = (u^i)$ ,  $v = (v^i)$  をとる. これらは局所的な  $C^\infty$  ベクトル場である

このとき

$$\pi_{ji} = u_j v_i - u_i v_j$$

とおくと  $\nabla_k \pi_{ji} = 0$ , すなわち  $\pi = (\pi_{ji})$  が平行であることが示される. また,  $\pi$  は同じ向きを持つ  $D$  の正規直交基底のとり方によらず, 大域的に定まることも分かる. すなわち  $\pi = \frac{1}{2} \pi_{ji} dx^j \wedge dx^i$  は,  $u, v$  を 1-形式と見なせば,  $\pi = u \wedge v$  で定義される大域的な 2-形式である.  $\pi$  に関する外積および内積作用素を定義する.  $p$ -形式  $w = (1/p!) w_{i_1 i_2 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$  に対して

$$e(\pi)w = \pi \wedge w$$

$$i(\pi)w = (1/(p-2)!)(\frac{1}{2} \pi^{ij} w_{i_1 i_2 \dots i_p}) dx^{i_3} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \quad (p \geq 2)$$

$$i(\pi)w = 0 \quad (p = 0, 1)$$

によって作用素  $e(\pi)$  および  $i(\pi)$  を定める. また

$$\phi(\pi) = e(u)i(u) + e(v)i(v)$$

により作用素  $\phi(\pi)$  を定義する.  $u, v$  は局所的であるが,  $\phi(\pi)$  は大域的な作用素であることが確かめられる.

§ 3. 結果.  $\pi$  に関する内積と外積の定義より

$$i(\pi) = i(v)i(u), \quad e(\pi) = e(u)e(v) \quad (1)$$

であり, これらを使って

$$i(\pi)^2 = e(\pi)^2 = 0$$

が示される. さらに,  $i(\pi)e(\pi)$  を  $p$ -形式  $w$  に作用させ (1) を使うことによって, 次の定理が証明される.

$$\text{定理 1} \quad I = i(\pi)e(\pi) + \phi(\pi) - e(\pi)i(\pi) \quad (2)$$

が成り立つ.

$e(\pi)$ ,  $i(\pi)$ ,  $\phi(\pi)$  を  $p$ -形式に対して作用させる時, それぞれ  $e(\pi)_p$ ,  $i(\pi)_p$ ,  $\phi(\pi)_p$  と書くことにする. もし  $w$  が調和であれば,  $i(\pi)w$  および  $e(\pi)w$  もまた調和であることが, 直接, 計算によって示される. ここで

$$K_p = i(\pi)_p^{-1}(0) \cap H_p$$

とおくと, (1) から

$$i(\pi)_p(H_p) \subset K_{p-2}$$

が得られる.

さてここで, 前節で定義した作用素  $\phi$  に関する条件

$$\phi(\pi) = 2 e(\pi)i(\pi) \quad (A)$$

を考える.  $p$ -形式に対する条件 (A), すなわち

$$\phi(\pi)_p = 2 e(\pi)_{p-2} i(\pi)_p \quad (A)_p$$

を  $(A)_p$  で表す.

いま, 条件  $(A)_{p-2}$  を仮定しておく. すなわち

$$\phi(\pi)_{p-2} = 2 e(\pi)_{p-4} i(\pi)_{p-2} \quad (A)_{p-2}$$

が成り立つものとする. このとき (2) によって

$$I = i(\pi)_p e(\pi)_{p-2} + e(\pi)_{p-4} i(\pi)_{p-2}$$

が得られる. これを使うと,  $w \in K_{p-2}$  に対して

$$w = lw = i(\pi)_p e(\pi)_{p-2} w$$

となり,  $w$  が  $i(\pi)_p(H_p)$  に含まれることが分かる. 従って  $K_{p-2} \subset i(\pi)_p(H_p)$  である. このことから, 条件  $(A)_{p-2}$  のもとで,  $H_p$  は  $K_p$  と  $K_{p-2}$  の直和にベクトル空間として同型であることが分かる. 従って  $K_p$  の次元を  $k_p$  とし,  $p < 0$ ,  $p > n$  の時には  $k_p = 0$  とすれば, 次の定理が成り立つ.

**定理 2** 条件  $(A)_{p-2}$  を仮定すれば, 関係

$$b_p = k_p + k_{p-2}$$

が成り立つ.

この定理から次の定理が得られる.

**定理 3**  $n$  を越えない偶数 (または奇数)  $p$  と任意の自然数  $r$  に対して, 条件  $(A)_q$  が  $p-4r-2 \leq q \leq p-2$  をみたすすべての偶数 (または奇数)  $q$  に対して成り立つならば,

$$\sum_{i=0}^{2r} (-1)^i b_{p-2i} = k_p + k_{p-4r-2} \geq 0$$

が成り立つ.

**§ 4. 条件(A)の局所表現.** 前節において仮定した条件(A)について考えよう.

まず, 今までに導入した作用素間に, 次の関係が成り立つことに注意する.

$$i(u)e(\pi)i(\pi) = e(v)i(\pi)$$

$$i(v)e(\pi)i(\pi) = -e(u)i(\pi)$$

$$i(u)\phi(\pi) = i(u) + e(v)i(\pi)$$

$$i(v)\phi(\pi) = i(v) - e(u)i(\pi)$$

これらの関係を使って次の定理が証明される.

**定理 4** 条件(A)は,

$$i(u) = e(v)i(\pi) \quad (3)$$

と

$$i(v) = -e(u)i(\pi) \quad (4)$$

が同時に成立することと同値である.

定理 4 を使って, 条件  $(A)_p$  の局所表現を与えよう. (3)と(4)を  $p$ -形式  $w = (w_{i_1 \dots i_p})$  に作用させると

$$u^r w_{r i_2 \dots i_p} = \sum_{\ell=2}^p (-1)^\ell v_{\lambda_\ell} u^r v^s w_{rs i_2 \dots \hat{i}_\ell \dots i_p} \quad (5)$$

$$v^r w_{r i_2 \dots i_p} = \sum_{\ell=2}^p (-1)^\ell u_{\lambda_\ell} v^r u^s w_{rs i_2 \dots \hat{i}_\ell \dots i_p} \quad (6)$$

が得られる.  $\hat{\phantom{x}}$  は, その部分の添字が除かれていることを表す.

ここで,  $D$  に直交する distribution を  $D^\perp$  で表せば,  $D$  が平行であることから,  $D$  と  $D^\perp$  は共に積分可能である. 従って  $M^n$  は局所的には Riemann 積  $M'^2 \times M''^{n-2}$  に等長である.  $M'^2$  の局所座標  $\{x^a; a=1, 2\}$  と  $M''^{n-2}$  の局所座標  $\{x^\lambda; \lambda=3, \dots, n\}$  から構成される  $M^n$  の座標  $\{x^i; i=1, 2, 3, \dots, n\}$  をとり, これを adapted coordinate と呼ぼう. この座標に関して,  $p$ -形式  $w$  は

$$\begin{aligned} w &= \sum_{I_1 < \dots < I_p} w_{I_1 \dots I_p} dx^{I_1} \wedge \dots \wedge dx^{I_p} \\ &= \sum_{\lambda_1 < \dots < \lambda_p} w_{\lambda_1 \dots \lambda_p} dx^{\lambda_1} \wedge \dots \wedge dx^{\lambda_p} \\ &\quad + \sum_{\lambda_2 < \dots < \lambda_p} w_{a \lambda_2 \dots \lambda_p} dx^a \wedge dx^{\lambda_2} \wedge \dots \wedge dx^{\lambda_p} \\ &\quad + \sum_{\substack{a < b \\ \lambda_3 < \dots < \lambda_p}} w_{ab \lambda_3 \dots \lambda_p} dx^a \wedge dx^b \wedge dx^{\lambda_3} \wedge \dots \wedge dx^{\lambda_p} \end{aligned} \quad (7)$$

と表せる. 添字の範囲は,  $a, b = 1, 2, \lambda_1, \dots, \lambda_p = 3, \dots, n$  である. (7)の右辺の第1, 第2, 第3各項をそれぞれ  $w^{(1)}, w^{(11)}, w^{(111)}$  で表せば  $p$ -形式  $w$  は  $w = w^{(1)} + w^{(11)} + w^{(111)}$  と分解される.  $w = w^{(1)}$  のとき I 型,  $w = w^{(11)}$  のとき

II型,  $w = w^{(111)}$  のときIII型であるとよぶことにする.  $w$  が調和であれば,  $w^{(1)}$ ,  $w^{(11)}$ ,  $w^{(111)}$  も調和であることが直接計算することによって示せる. adapted coordinate に関して  $u = \sum u_a dx^a$ ,  $v = \sum v_a dx^a$  とすれば, (5)と(6)は

$$u^a w_{a I_2 \dots I_p} = \sum_{\ell=2}^p (-1)^\ell v_{I_\ell} u^a v^b w_{ab I_2 \dots \widehat{I_\ell} \dots I_p} \quad (8)$$

$$v^a w_{a I_2 \dots I_p} = \sum_{\ell=2}^p (-1)^\ell u_{I_\ell} v^a u^b w_{ab I_2 \dots \widehat{I_\ell} \dots I_p} \quad (9)$$

となる.

$w$  がI型の場合には(8)と(9)は常に成り立つ.  $w$  がII型の場合には(8)および(9)の右辺は0であるから

$$u^i w_{i \lambda_2 \dots \lambda_p} + u^2 w_{2 \lambda_2 \dots \lambda_p} = 0$$

$$v^i w_{i \lambda_2 \dots \lambda_p} + v^2 w_{2 \lambda_2 \dots \lambda_p} = 0$$

となり, これと  $u, v$  が正規直交であることから

$$w_{a \lambda_2 \dots \lambda_p} = 0$$

が得られる.  $w$ がIII型である場合には, (8)と(9)は

$$u^a w_{ac \lambda_3 \dots \lambda_p} = v_c u^a v^b w_{ab \lambda_3 \dots \lambda_p}$$

$$v^a w_{ac \lambda_3 \dots \lambda_p} = u_c v^a u^b w_{ab \lambda_3 \dots \lambda_p}$$

である. 従って, 次の定理が成り立つ.

**定理5** adapted coordinate に関して, 条件(A)<sub>p</sub> は, p-形式  $w$  に対して次の

(i)(ii)が共に成り立つことと同値である:

(i)  $w^{(11)} = 0$

(ii)  $w^{(111)}$  に対して

$$u^a w_{ac \lambda_3 \dots \lambda_p} = v_c \alpha_{\lambda_3 \dots \lambda_p}$$

$$v^a w_{ac \lambda_3 \dots \lambda_p} = -u_c \alpha_{\lambda_3 \dots \lambda_p}$$

を満たす (p-2)-形式  $\alpha_{\lambda_3 \dots \lambda_p}$  が存在する.

$w^{(1)}$  に対しては(A)<sub>p</sub>は何の条件も課さない.

**§ 5. Riemann 積の場合.** この節では,  $M^n$  が Riemann 積  $M'^2 \times M''^{n-2}$  であるとする.  $M'^2$  および  $M''^{n-2}$  は連結, コンパクト, 向き付け可能であると仮定しておく.  $M^n, M'^2, M''^{n-2}$  の  $p$  次 Betti 数をそれぞれ  $b_p, b'_p, b''_p$  で表せば, これらの間に関係

$$b_p = \sum_{i=0}^p b'_i b''_{p-i}$$

が知られている. これを使って,  $b'_0 = b'_2 = 1, b'_q = 0$  ( $q \geq 3$ ) に注意すれば,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{2r} (-1)^i b_{p-2i} &= b''_p + b''_{p-4r-2} \\ &\quad + b'_1 (b''_{p-1} - b''_{p-3} + b''_{p-5} - \cdots + b''_{p-4r-1}) \end{aligned}$$

が得られる. この式から次の定理が導かれる.

**定理 6** Riemann 積多様体  $M^n = M'^2 \times M''^{n-2}$  において,

$$b'_1 = 0$$

または

$$b''_{p-3} = b''_{p-7} = \cdots = b''_{p-4r+1} = 0$$

の何れかが成り立つならば, 不等式

$$\sum_{i=0}^{2r} (-1)^i b_{p-2i} \geq 0$$

が任意の自然数  $r$  に対して成り立つ.

定理 6 で得た不等式は, 定理 3 で得たものと同じ不等式である.

ところで  $H_p(M^n)$  の基底は次の 3 つのタイプから構成される:

I 型  $w_1$  ( $w_1 \in H_p(M''^{n-2})$ ),

II 型  $\theta \wedge w_2$  ( $\theta \in H_1(M'^2), w_2 \in H_{p-1}(M''^{n-2})$ ),

III 型  $\pi \wedge w_3$  ( $w_3 \in H_{p-2}(M''^{n-2})$ )

II 型に対して, 条件  $(A)_p$  は,  $b'_1$  または  $b''_{p-1}$  の何れかが 0 になることと同値である. III 型に対しては, 定理 5 における  $\alpha$  として  $w_3$  をとることができ,  $(A)_p$  が常に



みたされていることが分かる。以上より次の定理が得られる。

**定理 7** Riemann 積多様体  $M^n = M'^2 \times M''^{n-2}$  において, 条件  $(A)_{p-2}$ ,  $(A)_{p-6}$ ,  
 $\dots$ ,  $(A)_{p-4r+2}$  が成り立つならば, 不等式

$$\sum_{i=0}^{2r} (-1)^i b_{p-2i} \geq 0$$

が任意の自然数  $p, r$  に対して成り立つ。

#### 参考文献

- [1] L. Karp, Parallel vector fields and the topology of manifolds, Bull.  
 Amer. Math. Soc. 83(1976), 1051-1053.
- [2] A. Lichnerowicz, Théorie globale des connexions et des groupes  
 d'holonomie, Ed. Cremonese, Roma, 1955.
- [3] Y. Ogawa and S. Tachibana, Parallel vector fields and the Betti number,  
 Proc. Japan Acad. 54(1978), 292-294.